Aula 13

Diferenciabilidade Complexa

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Diz-se que f **é diferenciável, ou tem derivada, no sentido complexo em** z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Quando este limite existe o seu valor designa-se por $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Diz-se que f **é holomorfa, ou analítica num ponto** z_0 se f for diferenciável em todos os pontos duma bola centrada em z_0.

Diz-se que f **é inteira** se $D_f = \mathbb{C}$ e se f é diferenciável em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Então, se f é diferenciável em $z_0 \Rightarrow f$ é contínua em z_0.

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciáveis em $z_0 \in \text{int}D_f \cap \text{int}D_g$. Então

- $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
- $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \quad (g(z_0) \neq 0)$,

e se $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável em $w = f(z_0) \in \text{int}D_h$

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Equações de Cauchy-Riemann

Teorema (Cauchy-Riemann): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int} D_f$. Então, f é diferenciável em $z_0 = x_0 + i\, y_0$ (no sentido complexo) se e só se

- f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$
- $f = u + iv$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

No caso em que $f'(z_0)$ existe, tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$